APÉNDICE MATEMÁTICO

1.- FORMULAS DE CÁLCULO VECTORIAL

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \quad [1.1]$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \quad [1.2]$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C}) \quad [1.3]$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\times\mathrm{B}\cdot\vec{D})\vec{C}-(\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D} \quad [1.4]$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\,\Psi=0 \quad [1.5]$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0 \quad [1.6]$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \quad [1.7]$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\Psi\vec{A})=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi+\Psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad [1.8]$$
$$\vec{\nabla}\times(\Psi\vec{A})=\Psi\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\Psi\times\vec{A} \quad [1.9]$$
$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \quad [1.10]$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \quad [1.11]$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\times(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \quad [1.12]$$

2.- TEOREMAS DEL CÁLCULO VECTORIAL

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=-4\,\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad [2.1]$$ tal que

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\begin{cases}1 & \text{si } \vec{r}-\vec{r}\,'=0\\ 0 & \text{si } \vec{r}-\vec{r}\,'\neq 0\end{cases}$$ es una función llamada delta de Dirac

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dv = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} \quad [2.2]$$ (Teorema de la divergencia)

$$\int_V \vec{\nabla}\Psi\,dv = \oint_S \Psi\,d\vec{s} \quad [2.3]$$

$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{A}\,dv = \oint_S d\vec{s}\times\vec{A} \quad [2.4]$$

$$\int_V (\Phi\nabla^2\Psi+\vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{\nabla}\Psi)\,dv = \oint_S (\Phi\vec{\nabla}\Psi-\Psi\vec{\nabla}\Phi)\cdot d\vec{s} \quad [2.5]$$

$$\int_V (\Phi\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Phi)\,dv = \oint_S d\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\Psi \quad [2.6]$$ (Teorema de Green)

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{l} \quad [2.7]$$ (Teorema de Stokes)

$$\int_S d\vec{s}\times\vec{\nabla}\Psi = \oint_\Gamma \Psi\,d\vec{l} \quad [2.8]$$

3.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN *n*

Una ecuación diferencial lineal de orden n toma la forma general

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\frac{d^{n-i}\ y(x)}{d\ x^{n-i}} \ = \ q(x) \quad \text{tal que} \quad a_0(x) \neq 0 \qquad [3.1]$$

tal que a las funciones $a_i(x)$ se les llama coeficientes y a $q(x)$ término independiente.

Si denotamos por $D^k \equiv \dfrac{d^k}{d\ x^k}$ [1] se puede escribir

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ D^{n-i}[y(x)] \ = \ q(x) \quad \text{tal que} \quad a_0(x) \neq 0$$

Si $q(x) = 0$ la ecuación diferencial se dice homogénea
Si $q(x) \neq 0$ la ecuación diferencial se dice no homogénea
Si $a_i(x) \neq 0 \ \forall i = 0, 1, \ldots\ldots n$ la ecuación diferencial se dice que es completa
Si algún $a_i(x) = 0 \ \ i = 0, 1, \ldots\ldots n$ la ecuación diferencial se dice que es incompleta

A) PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

1.- Si $y_k(x) \ \ k = 1, 2, \ldots\ldots l$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces cualquier combinación lineal de ellas $y(x) = \sum_{k=1}^{l} c_k\ y_k(x)$ es otra solución.

2.- Si $y_k(x) \ \ k = 1, 2, \ldots\ldots n$ forman un conjunto de soluciones linealmente independientes entonces la solución general de la ecuación homogénea es $y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ y_k(x)$

3.- Si $y^p(x) = R(x)$ es una solución particular de [3.1] la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = y_0(x) + R(x)$

B) ECUACIÓN DIFERENCIAL CON COEFICIENTES CONSTANTES

Si los coeficientes son constantes, es decir $a_i(x) = a_i \ \ \forall i = 0, 1, \ldots\ldots n$, la ecuación diferencial se llama de coeficientes constantes que se escribe como

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\ D^{n-i}[y(x)] \ = \ q(x) \quad \text{tal que} \quad a_0 \neq 0 \qquad [3.2]$$

Para calcular la solución de la homogénea se determinan las soluciones del polinomio característico $F(D)$ definido del siguiente modo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\ D^{n-i}[y(x)] \ = \ 0 \ \rightarrow \ \left[\!\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\ D^{n-i}\right]\!\right] y(x) = 0 \ \rightarrow \ F(D)[y(x)] = 0 \qquad [3.3]$$

$$F(D) \equiv \left[\!\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \, D^{n-i} \right]\!\right] \qquad [3.4]$$

Si tratamos a $F(D) = 0$ como un polinomio de grado n tendrá n soluciones m_k $k = 1, 2, \ldots .. n$ y podrá escribirse como $F(D) = (D - m_1)(D - m_2) \ldots \ldots .. (D - m_{n-1})(D - m_n)$, entonces la solución general de $F(D)[y(x)] = 0$ se puede escribir

b.1.- Si $m_i \neq m_j \quad \forall \; i \neq j \;\rightarrow\; y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, e^{m_k x}$ [3.5]

b.2.- Si la solución m_1 tiene multiplicidad r , es decir existen r soluciones iguales, entonces

$$y(x) = e^{m_1 x} \sum_{j=1}^{r} c_j \, x^{j-1} + \sum_{k=r+1}^{n} c_k \, e^{m_k x} \qquad [3.6]$$

b.3.- Si los a_i son reales y $a + b\,i$ es una solución de $F(D) = 0$ entonces $a - b\,i$ también es una solución; entonces la suma de los términos de la solución se pueden escribir como $A\, e^{(a+b\,i)\,x} + B\, e^{(a-b\,i)\,x} = e^{a\,x}\left[A\, e^{b\,x\,i} + B\, e^{-b\,x\,i}\right]$ [3.7]

b.4.- Las constantes c_k en física e ingeniería se determinan en cada problema concreto mediante las condiciones iniciales.

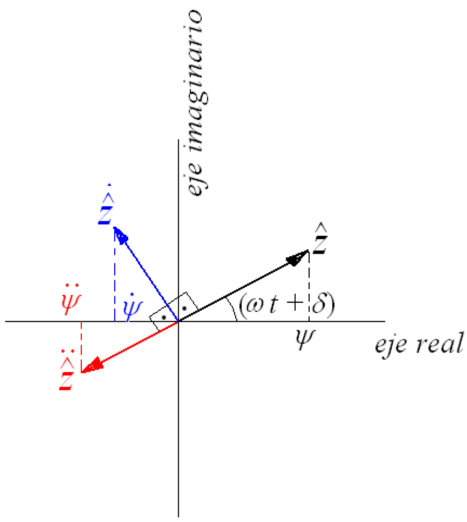
4.- VECTORES ROTATORIOS (FASORES). NOTACIÓN COMPLEJA

Una posible forma de escribir la evolución que experimenta un oscilador lineal era a través de la función $\psi(t) = A\cos(\omega\, t + \delta)$ [4.1].

Por otro lado tenemos la relación de Euler $\mathrm{e}^{j\,\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ / $|\mathrm{e}^{j\theta}| = 1$ [4.2]

A partir de [4.1] y [4.2] definimos el nº complejo $\hat{z}$, al que llamamos vector rotatorio o fasor, como $\hat{z} = A\cos(\omega\, t + \delta) + j\, A\sin(\omega\, t + \delta) = A\,\mathrm{e}^{j(\omega\, t + \delta)}$

Con este nº complejo así definido la solución de nuestro oscilador es simplemente la parte real de $\hat{z}$, o lo que es equivalente la proyección sobre el eje real del vector rotatorio $\hat{z}$ el cual gira con velocidad angular constante ω en sentido antihorario.



Si hubiéramos elegido como solución la forma seno entonces todo sería igual con sólo elegir la parte imaginaria del fasor $\hat{z}$ y utilizando la proyección sobre el eje imaginario.

Los procesos de multiplicación, división, derivación e integración con estos fasores tiene una mecánica muy simple, así

$$\hat{z} = A\,\mathrm{e}^{j(\omega\, t + \delta)}$$

$$\dot{\hat{z}} = \frac{d\;\hat{z}}{d\;t} = j\,\omega\,\hat{z}$$

$$\ddot{\hat{z}} = \frac{d^2\,\hat{z}}{d\;t^2} = (j\,\omega)^2\,\hat{z} = -\omega^2\,\hat{z}$$

Conviene recordar que la unidad imaginaria se puede expresar por la relación $j = \mathrm{e}^{j\,\pi/2}$