ECUACIONES de MAXWELL

1.-Campos variables con el tiempo: Corriente de desplazamiento

Las ecuaciones fundamentales de la magnetostática vistas en el tema anterior se resumen en
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ [1] $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}$ [2]
la primera tenía una validez general pero la segunda debía ser modificada pues se obtuvo en un entorno de corrientes estacionarias y está en contradicción con la ecuación de continuidad vista en el tema de corriente en Fundamentos Físicos I que tenía un carácter totalmente general y que era $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ [3], donde ρ y $\vec{j}$ indican la densidad de carga libre y la densidad de corriente libre respectivamente.

Pero la divergencia del rotacional de un campo vectorial es idénticamente nula por lo que aplicado a [2] y comparado con [3] vemos que hay una contradicción interna; en efecto

$$0\equiv\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$$

Maxwell razonó sobre el vector desplazamiento eléctrico en los siguientes términos

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0\quad[4]$$

Al término $\vec{j}_D=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ se le llama densidad de corriente de desplazamiento y representa el término que hay que añadir a la ecuación [2] para poner de acuerdo la ley de Ampere y la ecuación de continuidad, por lo que reescribimos la ley de Ampere, que a partir de ahora se llamará ecuación de Ampere – Maxwell, en la forma

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\quad[5]$$

2.- Ecuaciones de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831 – 1879) es considerado el padre de la teoría electromagnética contemporánea, pues sus trabajos de síntesis le condujeron a mostrar al mundo la primera teoría unificada de la electricidad y el magnetismo, en la que además de reunir todos los resultados experimentales y teóricos obtenidos hasta entonces en dichas materias, introdujo la corriente de desplazamiento y predijo la existencia de ondas electromagnéticas. A continuación se muestran las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, cualquier caso particular se deriva de ellas, que hacen referencia tanto a condiciones estáticas como a condiciones variables con el tiempo.

Ley de Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\ \Leftrightarrow\ \oint_{SC}\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V\rho\,dV$ [6.1]

Inexistencia de polos magnéticos aislados $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\ \Leftrightarrow\ \oint_{SC}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ [6.2]

Ley de Faraday $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \Leftrightarrow\ \oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$ [6.3]

Ley de Ampere – Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\ \Leftrightarrow\ \oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{j}+\partial\vec{D}/\partial t\right)\cdot d\vec{S}$ [6.4]

Puesto que el propósito de este tema es compendiar de algún modo toda la materia vista casi toda ella en Fundamentos Físicos I, conviene citar las ecuaciones que de un modo u otro acompañan a las ecuaciones de Maxwell. Las dos más relevantes son:

La fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ [7]

La ecuación de continuidad $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

Los conceptos de linealidad, isotropía y homogeneidad de un medio material también son aplicables a los campos variables con el tiempo; en el caso de un medio lineal, homogéneo e isótropo, caracterizado por σ (conductividad), ε (permitividad) y μ (permeabilidad), las relaciones entre las diferentes magnitudes son

$$\begin{aligned} &\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) \quad [8] \\ &\vec{j} = \sigma \vec{E} + \rho \vec{v} \end{aligned}$$

Las condiciones frontera sobre la superficie de separación *SS* de dos medios caracterizados por $\left(\sigma_1, \varepsilon_1, \mu_1\right)$ y $\left(\sigma_2, \varepsilon_2, \mu_2\right)$ se escriben

$$\left.\begin{aligned} &E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{21} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0 \\ &H_{1\mathrm{t}} - H_{2\mathrm{t}} = K \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{21} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{K} \\ &D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}} = \rho_s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{21} \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_s \\ &B_{1\mathrm{n}} - B_{2\mathrm{n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_{21} \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0 \end{aligned}\right. \qquad [9]$$

donde K representa una densidad lineal de corriente libre sobre *SS* que se mide en A/m ρ_s representa una densidad superficial de carga libre sobre *SS* que se mide en C/m^2 y el vector $\vec{n}_{21}$ es un vector unitario perpendicular en cada punto a *SS* y dirigido del medio 2 al medio 1

3.- Campos armónicos en el tiempo

La dependencia temporal de los campos electromagnéticos puede ser arbitraria, pero debido a los resultados de la teoría de Fourier cualquier variación temporal arbitraria puede descomponerse en un conjunto de variaciones sinusoidales con diferentes amplitudes, frecuencias y fases por lo que en multitud de ocasiones sólo trataremos con campos que varíen con el tiempo de forma sinusoidal, a dichos campos se les llama campos armónicos en el tiempo. Se dice que ***un campo es armónico en el tiempo*** si varía de forma sinusoidal. Las sinusoides son de fácil expresión en fasores, con los cuales es muy sencillo trabajar. Un fasor z es un nº complejo, como vimos en el tema inicial, que puede expresarse como

$$z = x + j\,y \equiv r_{\underline{|\phi}} \equiv r\,e^{j\phi} = \left(r\cos\phi + j\,\mathrm{sen}\,\phi\right) \;\; / \;\; r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \;\text{ y }\; \phi = \arctan\left(y/x\right)$$

Para introducir la variable tiempo podemos escribir $\phi = \omega t + \theta$ donde θ puede ser función de las coordenadas temporales, espaciales o simplemente una constante. Así la parte real e imaginaria de $r\,e^{j\phi} = r\,e^{j\theta}e^{j\omega t}$ están dadas por

$$\begin{aligned} &\Re_{\mathrm{e}}\left[r\,e^{j\phi}\right] = r\cos\left(\omega t + \theta\right) \\ &\mathrm{I}_{\mathrm{m}}\left[r\,e^{j\phi}\right] = r\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \theta\right) \end{aligned}$$

Una corriente sinusoidal $I\left(t\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \theta\right)$ equivale a la parte real de $I_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$ y otra corriente $I'(t)=I_0 \operatorname{sen}(\omega t+\theta)$ es la parte imaginaria de $I_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$. Al realizar operaciones matemáticas, sin embargo, hay que ser congruente en el empleo de la parte real o la imaginaria de una cantidad, no es posible usar ambas al mismo tiempo. El término complejo $I_0 e^{j\theta}$, el cual resulta de la eliminación del factor temporal $e^{j\omega t}$ en $I(t)$ se llama fasor de corriente $I_s = I_0 e^{j\theta} = I_{0|\underline{\theta}}$; así la corriente variable con el tiempo $I(t)=I_0\cos(\omega t+\theta)$ se puede representar por $I(t)=\Re_e\left[I_s\, e^{j\omega t}\right]$.

En general, un fasor puede ser un escalar o un vector. Si un vector $\vec{A}(x,y,z,t)$ es un campo armónico en el tiempo, la forma del fasor de $\vec{A}$ es $\vec{A}_s(x,y,z)$; la relación entre estas dos cantidades está dada por $\vec{A}=\Re_e\left(\vec{A}_s e^{j\omega t}\right)$ [10].

Si, por ejemplo, $\vec{A}=A_0\cos(\omega t-\beta x)\,\vec{j}$, $\vec{A}$ puede expresarse como

$$\vec{A}=\Re_e\left(A_0\, e^{-j\beta x}\vec{j}\, e^{j\omega t}\right)=\Re_e\left(\vec{A}_s\, e^{j\omega t}\right)\ \ /\ \ \vec{A}_s = A_0\, e^{-j\beta x}\vec{j}$$

Entre las propiedades más relevantes mostrar que a partir de [10] $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\Re_e\left(\vec{A}_s\, e^{j\omega t}\right)\right)=\Re_e\left(j\,\omega\vec{A}_s\, e^{j\omega t}\right)$ lo que demuestra que hacer la derivada temporal de la cantidad instantánea equivale a multiplicar por $j\,\omega$ su forma de fasor y con idéntico razonamiento para la integral tenemos las siguientes relaciones

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\to j\,\omega\vec{A}_s \quad \text{y} \quad \int\vec{A}\,\partial t\to\frac{\vec{A}_s}{j\,\omega} \quad [11]$$

Si aplicamos el concepto de fasor a campos electromagnéticos armónicos en el tiempo las ecuaciones de Maxwell se expresan como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}_s=\rho_s \quad\Leftrightarrow\quad \oint_{SC}\vec{D}_s\cdot d\vec{S}=\int_V\rho_s\, dV \quad [6.1\ \text{Armónica}]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_s=0 \quad\Leftrightarrow\quad \oint_{SC}\vec{B}_s\cdot d\vec{S}=0 \quad [6.2\ \text{Armónica}]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_s=-j\,\omega\vec{B}_s \quad\Leftrightarrow\quad \oint_C\vec{E}_s\cdot d\vec{l}=-j\,\omega\left(\int_S\vec{B}_s\cdot d\vec{S}\right) \quad [6.3\ \text{Armónica}]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}_s=\vec{j}_s+j\,\omega\vec{D}_s \quad\Leftrightarrow\quad \oint_C\vec{H}_s\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{j}_s+j\,\omega\vec{D}_s\right)\cdot d\vec{S} \quad [6.4\ \text{Armónica}]$$

4.- Energía del campo electromagnético

A la vista de lo resultados que hemos ido viendo podemos decir que cuando las fuentes de los campos no variaban con el tiempo los campos eléctricos y magnéticos estaban desacoplados, y podíamos estudiarlos de manera independiente.

Cargas estacionarias → campos electrostáticos

Corrientes estacionarias → campos magnetostáticos

Pero como se desprende de las ecuaciones de Maxwell generales los campos eléctricos y los campos magnéticos van indisolublemente unidos cuando los campos varían con el tiempo por lo que en cualquier lugar del espacio y en cualquier instante de tiempo allí donde exista un campo eléctrico existirá un campo magnético y a la inversa, por lo que podemos decir que

Corrientes variables con el tiempo → campos (u ondas) electromagnéticas

Así que la densidad de energía total será la suma de la densidad de energía asociada al campo eléctrico y la densidad de energía asociada al campo magnético; por tanto la densidad de energía asociada al campo u onda electromagnética se puede escribir

$$w=\frac{dU_{\mathrm{em}}}{dV}=w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\overset{\text{M. lin.}}{=}\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2$$
$$U_{\mathrm{em}}=\frac{1}{2}\int_V\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)dV \qquad [12]$$

Las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de las ondas electromagnéticas, hecho que fue comprobado por Heinrich Hertz, que logró generar y detectar ondas de radio, llamadas en su honor ondas hertzianas. Estas que están asociadas a unos campos eléctricos y magnéticos se propagan por el espacio llevando con ellas energía electromagnética distribuida con una densidad dada por [12]; en consecuencia podemos decir en general que ***las ondas son medios de transporte de energía o información*** (para nosotros energía e información serán sinónimos). Ejemplos comunes de ondas EM son las ondas de radio, las señales de televisión, los haces de radar y los rayos luminosos. Todas las formas de energía electromagnética comparten tres características fundamentales: se desplazan a gran velocidad, adoptan al hacerlo la forma de ondas e irradian hacia fuera desde una fuente sin ayuda de ningún vehículo físico discernible. Uno de los problemas que hay que abordar es la deducción del movimiento de las ondas en diferentes medios con la ayuda de las ecuaciones de Maxwell. Los medios más importantes son.

1.- El vacío $\left(\sigma=0,\ \varepsilon=\varepsilon_0,\ \mu=\mu_0\right)$

2.- Dieléctricos sin pérdidas $\left(\sigma=0,\ \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r,\ \mu=\mu_0\mu_r \text{ o } \sigma\ll\omega\varepsilon\right)$

3.- Dieléctricos disipativos $\left(\sigma\neq 0,\ \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r,\ \mu=\mu_0\mu_r\right)$

4.- Buenos conductores $\left(\sigma\simeq\infty,\ \varepsilon=\varepsilon_0,\ \mu=\mu_0\mu_r \text{ o } \sigma\gg\omega\varepsilon\right)$

donde ω es la frecuencia angular de la onda.

5.- Vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas (OEM) llevan asociada una energía electromagnética por lo tanto mediante ellas es posible transportar energía desde un punto (sede de un transmisor) a otro (sede de un receptor). La rapidez de la transmisión de energía puede obtenerse de las ecuaciones de Maxwell [6.3] y [6.4]

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\qquad [6.3.P]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad [6.4.P]$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{E}$ la [6.4.P]

$$\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H}=\sigma E^2+\vec{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad [13]$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial para cualesquiera dos campos vectoriales, en particular $\vec{H}$ y $\vec{E}$, $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)\equiv\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E}$ aplicada a [13] resulta

$$\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E}+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)=\sigma E^2+\vec{E}\cdot\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\sigma E^2+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\qquad [14] \text{ y teniendo en cuenta [6.3.P]}$$

$$\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{H}\cdot\left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}\cdot\vec{H}\right)=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}\qquad [15]$$

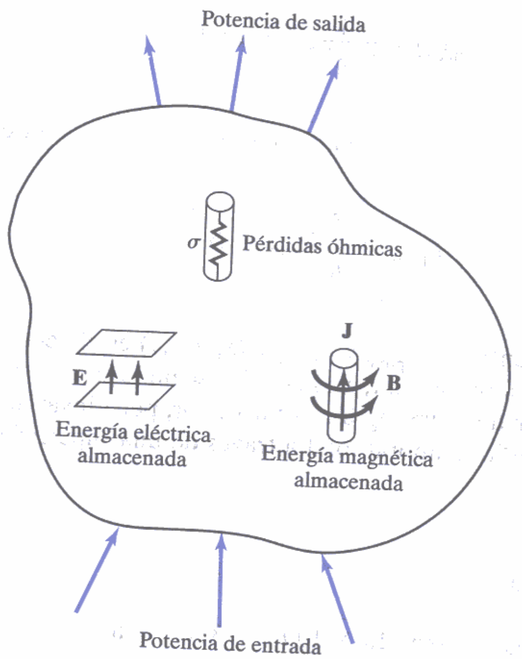
Llevando [15] a [14]

$$-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}-\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\sigma E^2+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}-\sigma E^2 \quad [16]$$

Calculando la integral de volumen a ambos miembros, (al volumen donde hay campos) $\int_V \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left[\frac{\mu}{2}H^2+\frac{\varepsilon}{2}E^2\right]dV-\int_V \sigma E^2\,dV$ y teniendo en cuenta el teorema de la divergencia resulta

$$\oint_{SC}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V\left[\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\right]dV\right\}-\int_V \sigma E^2\,dV \quad [17]$$

A la cantidad $\vec{E}\times\vec{H}$ se le llama vector de Poynting, $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ que se mide en W/m^2 y por tanto representa la intensidad de la onda o la densidad de potencia asociada con el campo electromagnético en un punto dado. La integración del vector de Poynting sobre una superficie cerrada da como resultado la potencia neta que sale a través de dicha superficie cerrada.



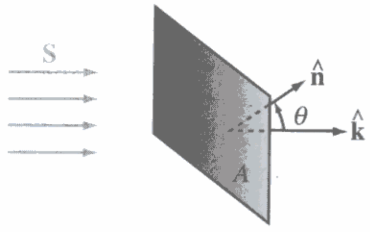
De [17] podemos concluir que la potencia total que sale de un volumen dado a través de la superficie cerrada que lo limita (lado izquierdo de la igualdad [17]) es igual a la rapidez del decremento de la energía almacenada en los campos eléctricos y magnéticos en la zona (primer término del segundo miembro de la igualdad [17]) menos la potencia óhmica disipada en el volumen (segundo término del segundo miembro de la igualdad [17]).

Esto no es más que el principio de conservación de la energía y lo que quiere decir la expresión [17] es que la potencia que sale del volumen a través de la superficie cerrada más la potencia disipada debe ser igual a la potencia que entra más la que queda almacenada en el volumen.

El vector de Poynting nos informa sobre la densidad de energía asociada al campo electromagnético así como la dirección y el sentido de cómo se propagan los campos y por tanto de cómo se propaga la energía asociada; en consecuencia podemos preguntarnos ¿Cuánta energía por unidad de tiempo puede captar un sensor situado en una zona donde se propagan los campos electromagnéticos?

Para fijar ideas supongamos una onda plana cuyo vector de Poynting tiene la dirección y el sentido del eje positivo z; al propagarse la onda se propaga con ella la energía y si la onda incide sobre una abertura de área A cuyo vector de superficie unitario está dirigido de forma que forma un ángulo θ con el vector de Poynting, entonces la potencia total que fluye a través de la abertura o que es interceptada por ella es

$$P=\int_A \vec{S}\cdot d\vec{A} \quad (\mathrm{W}).$$



Flujo de potencia EM a través de una abertura.

Como $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son funciones del tiempo, también lo será el vector de Poynting; sin embargo, en la práctica, la cantidad de mayor interés es la densidad de potencia promedio de la onda $\langle \vec{S} \rangle$, definido por $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(\vec{S}\,dt\right) = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dt$. Este cálculo depende de la forma de los campos eléctrico y magnético, pero si los campos son armónicos dicho valor puede determinarse mediante la expresión $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\Re_e\left[\vec{E}_s\times\vec{H}_s^*\right]$ (W/m^2), tomando como intervalo de integración un periodo de los campos armónicos.

6.- Ecuación de ondas para los campos electromagnéticos

La pregunta que nos hacemos es ¿por qué los campos electromagnéticos se pueden tratar como ondas tal y como predijo Maxwell?

Para responder consideremos un medio lineal, isótropo y homogéneo caracterizado por su permitividad ε y su permeabilidad μ, y tomemos rotacionales en la ecuación [6.3], y si tenemos en cuenta la relación del rotacional de otro rotacional $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\equiv\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}$; resulta

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)$$

Sustituyendo [6.1] y [6.4] en la relación anterior

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\rho-\nabla^2\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{j}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\frac{\vec{\nabla}\rho}{\varepsilon}} \quad [18]$$

Si en el medio no hay cargas libres $\rho = 0$ y el medio presenta una conductividad σ, la ecuación anterior, teniendo en cuenta que $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, se transforma en:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0} \quad [18.1]$$

De igual modo, tomando rotacionales en [6.4]

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{D}\right)$$

$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{j}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)-\nabla^2\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{j}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$ y teniendo en cuenta [6.2] y [6.3]

$$-\nabla^2\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{j}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{j}-\varepsilon\,\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\,\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\times\vec{j}} \quad [19]$$

Si, como en el caso anterior, en el medio no hay cargas libres $\rho = 0$ y el medio presenta una conductividad σ, la ecuación anterior, teniendo en cuenta que $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ y $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, se transforma en:

$$\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\,\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\sigma\vec{\nabla}\times\vec{E}=\sigma\,\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\;\Rightarrow\;\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\,\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-\sigma\,\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0 \quad [19.1]$$

Las ecuaciones [18] y [19] son ecuaciones lineales de segundo orden llamadas ecuaciones de ondas, por tanto ponen de manifiesto el carácter ondulatorio de los campos electromagnéticos.

La variedad de soluciones de las ecuaciones de ondas es prácticamente infinita por lo que solo algunas de las soluciones serán compatibles con las ecuaciones de Maxwell. Evidentemente todas las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cumplen las ecuaciones de ondas para E y H. Sin embargo, como las ecuaciones de ondas son de segundo orden y las de Maxwell son de primer orden, la inversa no tiene por qué ser cierta, es decir, no todas las soluciones de las ecuaciones de ondas cumplen las ecuaciones de Maxwell. Es necesario tener en cuenta que las ecuaciones de ondas se obtienen mediante el cálculo del rotacional de las ecuaciones de Maxwell, es decir del rotacional del rotacional de los campos y esta doble aplicación del rotacional no tiene idénticas propiedades que la aplicación simple de dicho operador. Será necesario comprobar qué soluciones de las ecuaciones de ondas cumplen las ecuaciones de Maxwell, puesto que estas son las que nos aseguran la correcta fenomenología del campo electromagnético. Las ecuaciones de ondas son simples instrumentos que, en algunos casos, facilitan el cálculo a la hora de obtener la solución del sistema electromagnético.

7.- Ondas electromagnéticas planas

7.a) Ondas armónicas. Permitividad compleja y constante de propagación.

A partir de la ecuación [6.4 Armónica], y teniendo en cuenta $\vec{j}_s=\sigma\vec{E}_s$, podemos escribir

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}_s=\vec{j}_s+j\,\omega\,\vec{D}_s=\sigma\vec{E}_s+j\omega\varepsilon\vec{E}_s=(\sigma+j\omega\varepsilon)\vec{E}_s=j\omega\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}_s=j\omega\varepsilon_c\vec{E}_s$$

en la que a $\varepsilon_c=\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{\omega}$ se le llama ***permitividad compleja*** que a menudo se escribe en función de una parte real ε' y una parte imaginaria ε'' de modo que

$$\varepsilon_c=\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}=\varepsilon'-j\varepsilon''\;/\;\varepsilon'=\varepsilon\text{ y }\varepsilon''=\frac{\sigma}{\omega}\quad [20].$$

Si en el medio no hay cargas libres $\rho=0$, de [18.1] y para campos armónicos se tiene que

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu\,\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0\;\overset{\text{Campos armónicos}}{\Rightarrow}\;\nabla^2\vec{E}_s+\mu\,\varepsilon\,\omega^2\vec{E}_s-j\mu\,\sigma\,\omega\vec{E}_s=0$$

$$\nabla^2\vec{E}_s+\mu\,\varepsilon\,\omega^2\vec{E}_s-j\mu\,\sigma\,\omega\vec{E}_s=0\;\Rightarrow\;\nabla^2\vec{E}_s+\omega^2\mu\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}_s=0$$

$\nabla^2\vec{E}_s+\omega^2\mu\left(\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}_s=0\;\Rightarrow\;\nabla^2\vec{E}_s+\omega^2\mu\,\varepsilon_c\vec{E}_s=0$ que se conoce con el nombre de ***ecuación de onda homogénea para*** $\vec{E}_s$. Si hacemos $\gamma^2=-\omega^2\mu\,\varepsilon_c=-\omega^2\mu\left(\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{\omega}\right)$ [21], en la que a γ se le conoce con el nombre de ***constante de propagación***, la ecuación homogénea se escribe

$$\nabla^2\vec{E}_s+\omega^2\mu\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}_s=0\;\Rightarrow\;\nabla^2\vec{E}_s-\gamma^2\vec{E}_s=0\quad [22]$$

7.b) Propagación en medios dieléctricos sin pérdidas

7.b.1.- *Velocidad de propagación e índice de refracción.*

En estos medios tenemos que $\sigma = 0$ y las ecuaciones de ondas [18.1] y [18.2] se reducen a $\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ [18.2] y $\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\,\mu\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$ [19.2] , que representan ecuaciones de ondas sin pérdidas. Vamos a estudiar ahora una de las posibles soluciones como son las **ondas planas** que se definen, según vimos en el capítulo anterior, como ondas que en un instante dado tienen la misma fase en todos los puntos de un plano perpendicular a la dirección de propagación. Consideremos una **onda armónica** de frecuencia ω entonces la onda plana para el campo eléctrico será

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \quad [23]$$

Para un instante dado *t*, los puntos que cumplen con la condición $\vec{k}\cdot\vec{r} = \mathrm{CTE}$ donde CTE es una constante tienen la misma fase y por tanto el mismo valor del campo eléctrico. De otro modo, en todos los puntos del plano perpendicular a $\vec{k}$ (vector de ondas), definido por $\vec{k}\cdot\vec{r} = \mathrm{CTE}$, el campo eléctrico tiene el mismo valor. La longitud de onda, mínima distancia entre dos puntos cuya fase difiere en 2π, o mínima distancia entre dos planos en cuyos puntos el campo eléctrico tiene el mismo valor es $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$.

Si en lugar de fijar el tiempo, y observar los valores del campo eléctrico en los diferentes puntos del espacio, fijamos un punto del espacio, entonces con el paso del tiempo el campo vibra (va cambiando de valor). La frecuencia de vibración, en un punto fijo del espacio, es ω. Sustituyendo [23] en la ecuación [18.2]

$$\left(-k^2 + \omega^2\varepsilon\,\mu\right)\vec{E}_0\, e^{j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} = 0 \;\Rightarrow\; k^2 = \omega^2\varepsilon\,\mu \quad [24]$$

El lugar geométrico de los puntos del espacio que tienen la fase constante, para un instante dado, cumplen la relación $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{ constante } \Rightarrow \mathrm{k}_1 x + \mathrm{k}_2 y + \mathrm{k}_3 z = \omega t - \text{constante}$, y por tanto tienen el mismo estado de vibración del campo eléctrico, siendo $\vec{k} = \mathrm{k}_1\vec{i} + \mathrm{k}_2\vec{j} + \mathrm{k}_3\vec{k}$ un vector que es perpendicular al plano de fase. $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\,\vec{e}_k\cdot\vec{r} = k\,\xi$, siendo ξ la distancia del plano de fase (frente de onda) al origen de coordenadas. Un frente onda se desplaza de modo que su fase permanece constante al transcurrir el tiempo, por tanto diferenciando la expresión del plano de fase anterior $\omega t - k\xi = \text{ constante}$ resulta $\omega\, dt - k\, d\xi = 0 \Rightarrow u = \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \vec{u} = u\,\vec{e}_k = \dfrac{\omega}{k}\vec{e}_k$ [25], es decir, los planos de fase se mueven a una velocidad constante, en la dirección $\vec{e}_k = \dfrac{\vec{k}}{k}$, $\vec{u} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \dfrac{\omega}{k}\dfrac{\vec{k}}{k} = \dfrac{\omega}{k}\vec{e}_k$ y tal que $u = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$ y si estuviéramos en el vacío $u = c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, que resulta ser la velocidad de la luz por lo que concluimos que la luz no es más que onda electromagnética. Desde 1983 y por convenio internacional la velocidad de la luz se considera exacta, c = 299792458 m/s, y el metro se define como la longitud que recorre la luz en 1/c segundos. A efectos prácticos tomaremos como velocidad de la luz en el vacío, que resulta ser un límite máximo para la velocidad de cualquier evento $c \cong 3\cdot 10^8$ m/s .

En un medio se define el índice de refracción $n = \dfrac{c}{u} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\,\mu}{\varepsilon_0\,\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}$

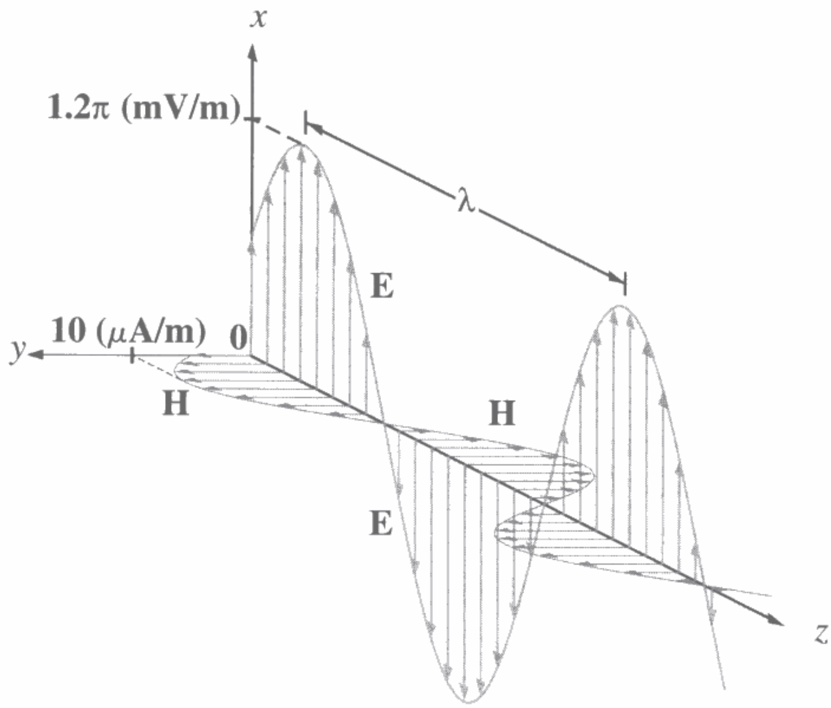
Si se supone una onda plana para el campo magnético del tipo $\vec{H} = \vec{H}_0\, e^{j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$ llegaríamos a las mismas conclusiones.

7.b.2.- *Características de las ondas planas en medios dieléctricos. Perpendicularidad* $\left\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}\right\}$

Para que las soluciones de las ecuaciones de ondas cumplan también las ecuaciones de Maxwell, deben cumplir ciertas condiciones. En primer lugar

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 = j\,\vec{k}\cdot\vec{E}_0\, e^{j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \;\Rightarrow\; \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \text{ y también } \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{k}\cdot\vec{H} = 0 \quad [26]$$

De las ecuaciones anteriores se infiere que los vectores campo eléctrico y campo magnético son perpendiculares a la dirección de propagación. Esto quiere decir que dichas ondas son ondas transversales. En la figura se representa esta situación cuando el vector nº de onda coincide con la dirección positiva del eje Z.



De la ley de Faraday [6.3] se puede deducir

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \vec{k}\times\vec{E} = \omega\,\vec{B}$, que nos indica que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ además de perpendiculares a $\vec{k}$, también son perpendiculares entre sí.

La relación entre módulos es $k\,E = \omega\,B \;\Rightarrow\; B = \dfrac{k}{\omega}E = \dfrac{E}{u}$ [27]

De [6.4], y teniendo en cuenta que no existe densidad de corriente libre

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D} \;\Rightarrow\; \vec{k}\times\vec{B} = -\varepsilon\,\mu\,\omega\,\vec{E} = -\frac{\omega}{c^2}n^2\vec{E}$$

De nuevo obtenemos que los campos son perpendiculares y con la misma relación entre módulos.

$$E = \frac{c}{n} B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H \quad [28]$$

El factor $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ [29] se denomina impedancia característica del medio ya que tiene las dimensiones de una resistencia eléctrica, para el vacío $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377\ \Omega$.

De $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \ \Rightarrow\ k\,\vec{e}_k \times \vec{E} = \omega\,\mu\,\vec{H} \ \Rightarrow\ \vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{e}_k \times \vec{E}$ en la que $\vec{e}_k$ es un vector unitario en la dirección de propagación.

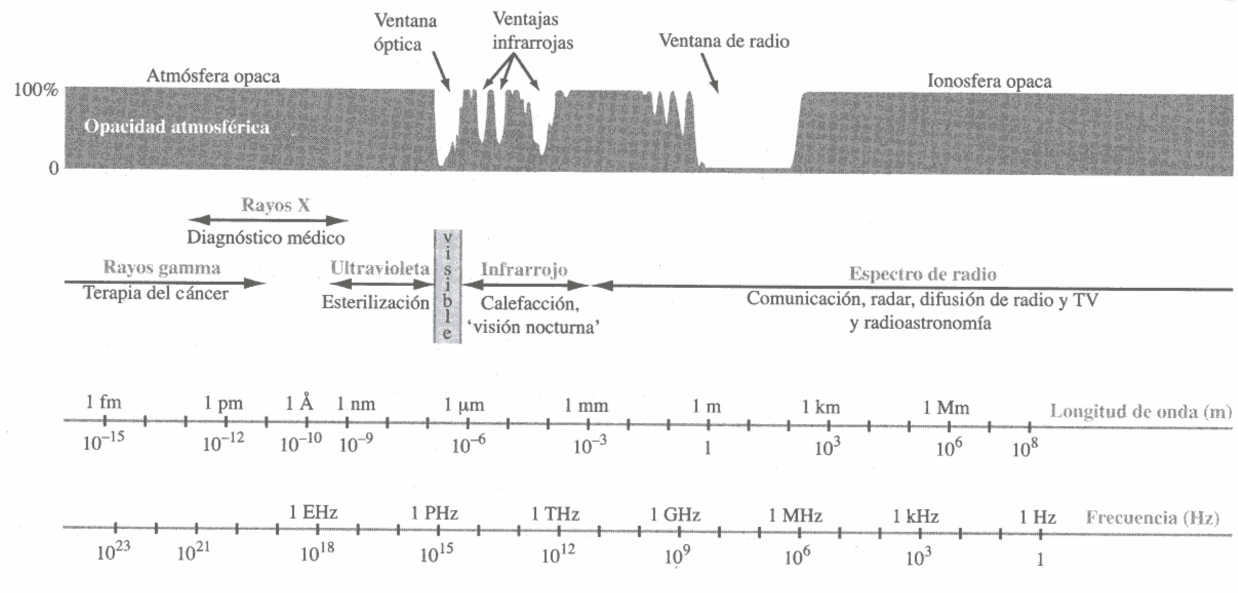
De $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \ \Rightarrow\ k\,\vec{e}_k \times \vec{H} = -\varepsilon\,\omega\,\vec{E} \ \Rightarrow\ \vec{E} = -\eta\,\vec{e}_k \times \vec{H}$.

Resumiendo podemos escribir la relación entre los campos para el caso de ondas planas

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{e}_k \times \vec{E} \ \Rightarrow\ \vec{H}_s = \frac{1}{\eta}\vec{e}_k \times \vec{E}_s \\ \vec{E} = -\eta\,\vec{e}_k \times \vec{H} \ \Rightarrow\ \vec{E}_s = -\eta\,\vec{e}_k \times \vec{H}_s \end{array}\right. \quad [30]$$

8.- Espectro electromagnético

Las ondas electromagnéticas se caracterizan unívocamente por sus frecuencias que pueden tener como valor cualquier número positivo; el conjunto de frecuencias de las **O.E.M.** se conoce con el nombre de espectro electromagnético. Estas frecuencias se agrupan en intervalos que nos dan una clasificación que suele basarse en las diferentes formas que existen para generar y detectar dichas ondas. En la siguiente tabla se muestra el espectro electromagnético desde la perspectiva de la atmósfera terrestre como barrera electromagnética para la vida en el planeta.



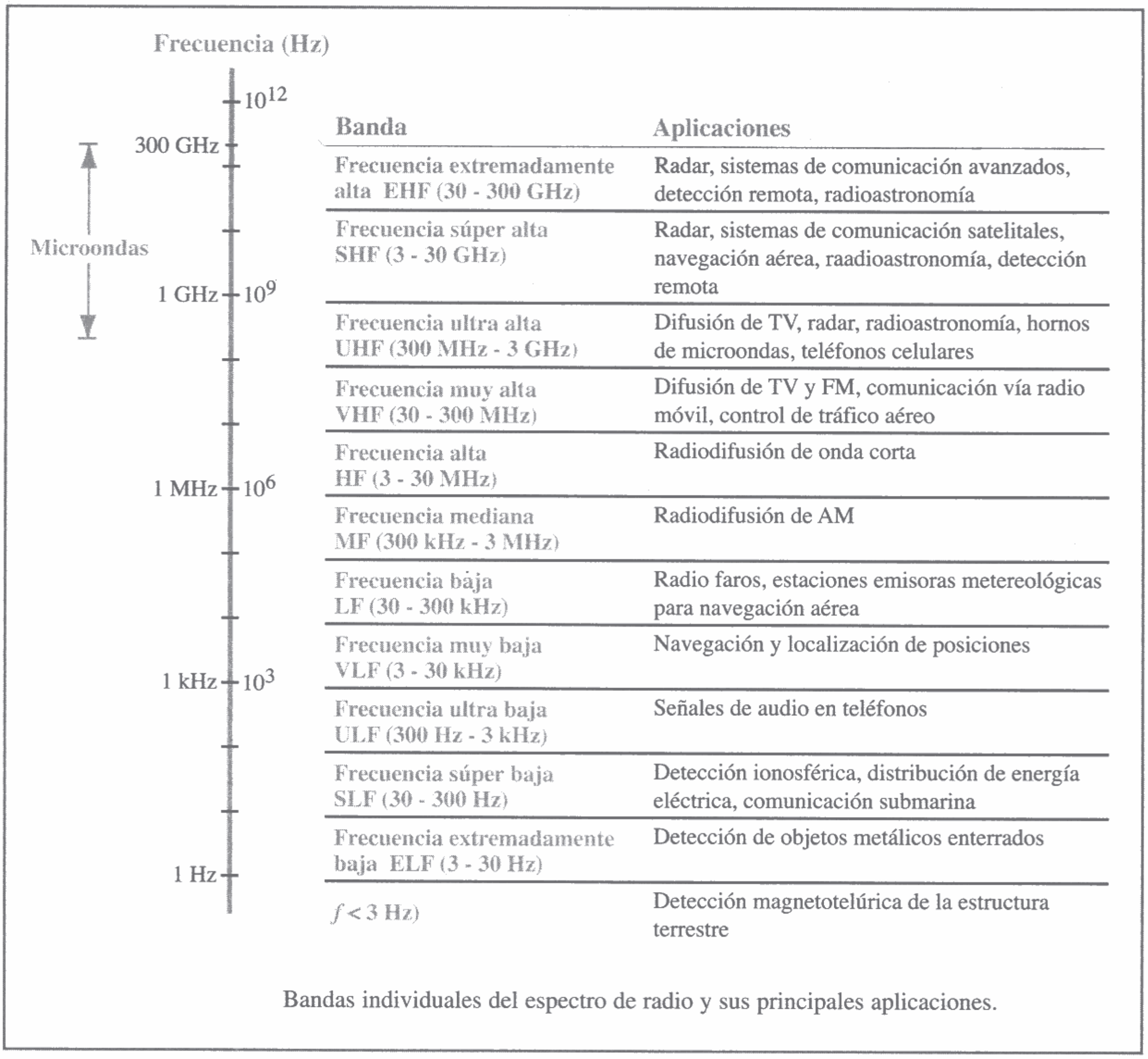
El espectro electromagnético.

En la tabla siguiente se muestran en la columna central los valores de la frecuencia, en la columna de la izquierda se muestran las longitudes de onda, si se supone propagación en el vacío, que corresponden a cada frecuencia; y en la columna de la derecha el nombre con el que se denomina cada intervalo del espectro. Se puede comprobar que la región visible, la que es posible detectar con el ojo humano, a pesar de su importancia en la vida cotidiana, ocupa un intervalo muy reducido de frecuencias. En algunos casos también se indica la energía que corresponde a un fotón, en unidades de *electronvolts* (esta unidad de *electronvolt*, eV, es la energía que adquiere un electrón cuando se le somete a un campo eléctrico uniforme generado por una $\Delta\varphi = 1\ \mathrm{V}$.

Espectro electromagnético

longitud de onda	frecuencia (Hz)	nombre
$10^{-15} - 10^{-11}$ m	$3 \times 10^{23} - 3 \times 10^{19}$	rayos cósmicos y rayos gamma
$10^{-11} - 10^{-9}$ m	$3 \times 10^{19} - 3 \times 10^{17}$	rayos X (100 – 1 keV)
ultravioleta (1 keV – 3 eV)		
1 – 280 nm	$3 \times 10^{17} - \ldots$	UVC (absorbida por el ozono)
280 – 320 nm		UVB (broncea)
320 – 400 nm	$\ldots - 7{,}5 \times 10^{14}$	UVA (atraviesa los vidrios)
visible ~ 1 eV		
400 – 480 nm	$7{,}5 \times 10^{14} - \ldots$	azul (3,10 eV)
500 – 530 nm		verde
570 – 580 nm		amarillo
620 – 750 nm	$\ldots - 4 \times 10^{14}$	rojo (1,65 eV)
infrarrojo (1 eV – 1 meV)		
0,75 – 3 μm	$4 \times 10^{14} - \ldots$	infrarrojo próximo
3 – 6 μm		infrarrojo intermedio
6 – 15 μm		infrarrojo lejano
15 – 1000 μm	$\ldots - 3 \times 10^{11}$	infrarrojo extremo
microondas (1 meV – 1 μeV)		
1 – 10 mm	$3\times10^{11} - 3\times10^{10}$	EHF (extremely high frequency)
10 – 100 mm	$3\times10^{10} - 3\times10^{9}$	SHF (super high frequency)
100 – 1000 mm	$3\times10^{9} - 3\times10^{8}$	UHF (ultra high frequency)
radiofrecuencias		
1 – 10 m	$3\times10^{8} - 3\times10^{7}$	VHF (very high frequency)
10 – 100 m	$3\times10^{7} - 3\times10^{6}$	HF (high frequency)
100 – 1000 m	$3\times10^{6} - 3\times10^{5}$	MF (medium frequency)
1 – 10 km	$3\times10^{5} - 3\times10^{4}$	LF (low frequency)
más de 10 km	$3\times10^{4} - 0$	VLF (very low frequency)
6000 – 5000 km	50 – 60	corriente alterna

En la siguiente tabla se muestran las bandas de frecuencias más relevantes desde las frecuencias más bajas hasta el infrarrojo próximo así como su uso en las tecnologías actuales.



Banda	Aplicaciones
Frecuencia extremadamente alta EHF (30 - 300 GHz)	Radar, sistemas de comunicación avanzados, detección remota, radioastronomía
Frecuencia súper alta SHF (3 - 30 GHz)	Radar, sistemas de comunicación satelitales, navegación aérea, raadioastronomía, detección remota
Frecuencia ultra alta UHF (300 MHz - 3 GHz)	Difusión de TV, radar, radioastronomía, hornos de microondas, teléfonos celulares
Frecuencia muy alta VHF (30 - 300 MHz)	Difusión de TV y FM, comunicación vía radio móvil, control de tráfico aéreo
Frecuencia alta HF (3 - 30 MHz)	Radiodifusión de onda corta
Frecuencia mediana MF (300 kHz - 3 MHz)	Radiodifusión de AM
Frecuencia baja LF (30 - 300 kHz)	Radio faros, estaciones emisoras metereológicas para navegación aérea
Frecuencia muy baja VLF (3 - 30 kHz)	Navegación y localización de posiciones
Frecuencia ultra baja ULF (300 Hz - 3 kHz)	Señales de audio en teléfonos
Frecuencia súper baja SLF (30 - 300 Hz)	Detección ionosférica, distribución de energía eléctrica, comunicación submarina
Frecuencia extremadamente baja ELF (3 - 30 Hz)	Detección de objetos metálicos enterrados
$f < 3$ Hz)	Detección magnetotelúrica de la estructura terrestre

Bandas individuales del espectro de radio y sus principales aplicaciones.

9.- Intensidad de una onda electromagnética. Valor medio del vector de Poynting

En el punto 6.1 del tema “Resumen de ondas” se habló de la intensidad de una onda mecánica la cual dependía explícitamente de la frecuencia de la onda ya que la energía cinética depende de la velocidad de vibración y está depende directamente de la frecuencia de vibración; en cualquier caso pudimos establecer que $I = \langle w_{\text{mec}} \rangle c$; y en el punto 6.2 que se titulaba la intensidad de una onda electromagnética se remitió a este apartado. En el caso de la onda electromagnética no se puede hablar de energía cinética pero se puede sustituir por su análogo que en este caso resulta ser el campo magnético; en consecuencia no va a aparecer la frecuencia de vibración en los resultados obtenidos, pero ¿podremos hallar un resultado similar a $I = \langle w_{\text{mec}} \rangle c$? La respuesta es sí.

Veíamos en temas precedentes que la densidad de energía del campo electromagnético era $w_{\text{em}} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$, si tenemos en cuenta [25], se observa que las densidad de energía eléctrica es igual a la densidad de energía magnética, por tanto $w_{\text{em}} = \varepsilon E^2 = \mu H^2$. El flujo de energía, dado por el vector de Poynting (energía por unidad de superficie y unidad de tiempo) resulta $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\omega\mu}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{\omega\mu} E^2 \vec{k} = \frac{n}{\mu c} E^2 \vec{e}_k = \varepsilon v E^2 \vec{e}_k$.

Los campos varían con el tiempo así que el valor medio de la densidad de energía cambia con el tiempo y nosotros estamos interesados en valores promedio; así para una onda armónica el valor medio en un periodo nos da el valor promedio de la densidad de energía que resulta ser $\langle w_{\text{em}} \rangle = w_{\text{em}} = \frac{1}{T}\int_0^T w_{\text{em}}(t)\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon E_{\max}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$. Del mismo modo el flujo de energía cambia con el tiempo y nosotros estamos interesados en valores promedio; así para una onda armónica el valor medio en un periodo nos da el valor promedio del vector de Poynting que suele llamarse *intensidad de la onda*, que es

$$I = \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon v E_{\max}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 = \langle w_{\text{em}} \rangle v = w_{\text{em}} v \quad [31]$$

Resumiendo, para una onda plana los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son perpendiculares entre sí siendo además perpendiculares a la dirección de propagación; la relación entre sus módulos es la velocidad de propagación en el medio. Cuando hablamos de ondas planas admitimos de forma implícita que los sistemas que generan esas ondas están muy alejados de la zona de observación.